

TD1: Espaces vectoriels

Les exercices ou les questions marqués de (*) sont du cours ou des compléments de cours. A travailler en classe et/ou chez soi à l'aide du livre de Grifone.

Les exercices supplémentaires marqués de (**) ne seront pas forcément traités en classe.

Espaces vectoriels

Exercice 1. On munit \mathbb{R}^2 des lois : $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$. Cet ensemble est-il un espace vectoriel ?

Solution. L'axiome B.4 n'est pas vérifié car $1(x_1, x_2) = (x_1, 0) \neq (x_1, x_2)$ si $x_2 \neq 0$. \mathbb{R}^2 muni de ces lois n'est donc pas un espace vectoriel.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Montrer que les lois

$$x \oplus y = xy \quad \text{et} \quad \lambda \otimes x = x^\lambda \quad \text{pour } x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$$

confèrent à E une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Solution. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On vérifie d'abord que $X \oplus y \in E$ et $\lambda \otimes x \in E$. Vérifions ensuite les 8 axiomes définissant un espace vectoriel :

$$(A.1) \quad (x \oplus y) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (y \oplus z).$$

$$(A.2) \quad x \oplus y = xy = yx = y \oplus x.$$

$$(A.3) \quad 1 \in E \text{ et } x \oplus 1 = x \cdot 1 = x, \text{ donc } 1 \text{ est l'élément neutre pour } \oplus.$$

$$(A.4) \quad \text{Pour tout } x \in E, \text{ l'élément } x^{-1} = 1/x \in E \text{ est l'opposé de } x \text{ dans } E \text{ car } x \oplus x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

$$(B.1) \quad \lambda \otimes (\mu \otimes x) = (x^\mu)^\lambda = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \otimes x.$$

$$(B.2) \quad (\lambda + \mu) \otimes x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x).$$

$$(B.3) \quad \lambda \otimes (x \oplus y) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y).$$

$$(B.4) \quad 1 \otimes x = x^1 = x.$$

(E, \oplus, \otimes) est donc bien un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 3. (*) Soit E un espace vectoriel. Montrer que :

$$1. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E.$$

$$2. \quad \forall v \in E : 0 \cdot v = \mathbf{0}_E.$$

$$3. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E : \lambda \cdot (-v) = (-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v).$$

Solution.

$$1. \quad \text{Soit } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lambda \cdot \mathbf{0}_E = \lambda \cdot (\mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E) = \lambda \cdot \mathbf{0}_E + \lambda \cdot \mathbf{0}_E. \text{ Par conséquent,}$$

$$\mathbf{0}_E = \lambda \cdot \mathbf{0}_E + (-\lambda \cdot \mathbf{0}_E) = \lambda \cdot \mathbf{0}_E + \lambda \cdot \mathbf{0}_E + (-\lambda \cdot \mathbf{0}_E) = \lambda \cdot \mathbf{0}_E.$$

$$2. \quad \text{Soit } u \in E, \text{ alors } 0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = (0 \cdot u) + (0 \cdot u). \text{ De la même façon, on en déduit que } \mathbf{0}_E = 0 \cdot u + (-0 \cdot u) = 0 \cdot u + 0 \cdot u + (-0 \cdot u) = 0 \cdot u.$$

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in E$, $\lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (v + (-v)) = \lambda \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$ donc $\lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$.

En plus, $(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = (-\lambda + \lambda) \cdot v = 0 \cdot v = \mathbf{0}_E$ donc $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$.

Exercice 4. (*) Soient $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ deux espaces vectoriels. On considère leur espace produit $(E_1 \times E_2, +_{12}, \cdot_{12})$ où les opérations sont données par :

$$(u_1, u_2) +_{12} (v_1, v_2) = (u_1 +_1 v_1, u_2 +_2 v_2) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot_{12} (u_1, u_2) = (\lambda \cdot_1 u_1, \lambda \cdot_2 u_2)$$

pour $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $(E_1 \times E_2, +_{12}, \cdot_{12})$ est un espace vectoriel.

Solution. On vérifie les 8 axiomes d'espace vectoriel :

$$(A.1) \quad \forall u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in E :$$

$$\begin{aligned} (u +_{12} v) +_{12} w &= (u_1 +_1 v_1, u_2 +_2 v_2) +_{12} w \\ &= ((u_1 +_1 v_1) +_1 w_1, (u_2 +_2 v_2) +_2 w_2) \\ &= (u_1 +_1 (v_1 +_1 w_1), u_2 +_2 (v_2 +_2 w_2)) \quad \text{car } E_1, E_2 \text{ sont des ev} \\ &= u +_{12} (v +_{12} w) \\ &= u +_{12} (v +_{12} w) \end{aligned}$$

$$(A.2) \quad \forall u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in E :$$

$$u +_{12} v = (u_1 +_1 v_1, u_2 +_2 v_2) = (v_1 +_1 u_1, v_2 +_2 u_2) = v +_{12} u.$$

$$(A.3) \quad \text{Soient } \mathbf{0}_{E_1} \text{ et } \mathbf{0}_{E_2} \text{ les éléments neutres de } E_1 \text{ et } E_2. \text{ Alors } \mathbf{0}_E = (\mathbf{0}_{E_1}, \mathbf{0}_{E_2}) \text{ est l'élément neutre de } E : \text{ pour tout } u = (u_1, u_2) \in E$$

$$\mathbf{0}_E +_{12} u = (\mathbf{0}_{E_1} +_1 u_1, \mathbf{0}_{E_2} +_2 u_2) = (u_1, u_2) = u.$$

$$(A.4) \quad \forall u = (u_1, u_2), \text{ l'opposé est } -u = (-u_1, -u_2) \text{ car :}$$

$$u +_{12} (-u) = (u_1 +_1 (-u_1), u_2 +_2 (-u_2)) = (\mathbf{0}_{E_1}, \mathbf{0}_{E_2}) = \mathbf{0}_E.$$

$$(B.1) \quad \text{Pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ et } u = (u_1, u_2) \in E :$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot_{12} (\mu \cdot_{12} u) &= \lambda \cdot_{12} (\mu \cdot_1 u_1, \mu \cdot_2 u_2) \\ &= (\lambda \cdot_1 (\mu \cdot_1 u_1), \lambda \cdot_2 (\mu \cdot_2 u_2)) = ((\lambda\mu) \cdot_1 u_1, (\lambda\mu) \cdot_2 u_2) = (\lambda\mu) \cdot_{12} u. \end{aligned}$$

$$(B.2) \quad \text{Pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ et } u = (u_1, u_2) \in E :$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot_{12} u &= ((\lambda + \mu) \cdot_1 u_1, (\lambda + \mu) \cdot_2 u_2) \\ &= ((\lambda \cdot_1 u_1) +_1 (\mu \cdot_1 u_1), (\lambda \cdot_2 u_2) +_2 (\mu \cdot_2 u_2)) = (\lambda \cdot_{12} u) +_{12} (\mu \cdot_{12} u). \end{aligned}$$

$$(B.3) \quad \text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in E :$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot_{12} (u +_{12} v) &= \lambda \cdot_{12} (u_1 +_1 v_1, u_2 +_2 v_2) \\ &= (\lambda \cdot_1 (u_1 +_1 v_1), \lambda \cdot_2 (u_2 +_2 v_2)) \\ &= ((\lambda \cdot_1 u_1) +_1 (\lambda \cdot_1 v_1), (\lambda \cdot_2 u_2) +_2 (\lambda \cdot_2 v_2)) \\ &= (\lambda \cdot_1 u_1, \lambda \cdot_2 u_2) +_{12} (\lambda \cdot_1 v_1, \lambda \cdot_2 v_2) = (\lambda \cdot_{12} u) +_{12} (\lambda \cdot_{12} v) \end{aligned}$$

$$(B.4) \quad \forall u = (u_1, u_2) \in E, 1 \cdot_2 u = (1 \cdot_1 u_1, 1 \cdot_2 u_2) = (u_1, u_2) = u.$$

Sous-espaces vectoriels

Exercice 5. On considère les quatre sous-ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} & E_2 &= \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ E_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\} & E_4 &= \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Le(s)quel(s) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Solution.

- $E_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$
est un sous-espace vectoriel par définition.
- E_2 est l'ensemble vide, donc pas un sous-espace vectoriel.
- E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient pas la matrice nulle.
- E_4 est un sous espace vectoriel : si A, B sont des matrices dans E_4 et $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $\lambda \cdot A + B$ est dans E_4 car

$$(\lambda \cdot A + B) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $\mathbb{R}^{[a,b]}$ l'espace vectoriel des applications d'un intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R} , muni des lois usuelles. Le(s)quel(s) des sous-ensembles suivants est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$?

1. $E_1 = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .
2. E_2 , l'ensemble des applications surjectives de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .
3. E_3 , l'ensemble des applications $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $2f(a) = f(b)$.
4. E_4 , l'ensemble des applications croissantes de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Solution.

1. La fonction nulle appartient à E_1 donc $E_1 \neq \emptyset$. Soit $f, g \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x_0 \in [a, b]$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) + g(x) = \lambda f(x_0) + g(x_0)$. Donc $\lambda f + g$ est continue et E_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.
2. La fonction nulle n'appartient pas à E_2 , donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. La fonction nulle appartient bien à E_3 , donc $E_3 \neq \emptyset$. Si $f, g \in E_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $2(\lambda f + g)(a) = 2\lambda f(a) + 2g(a) = \lambda f(b) + g(b) = (\lambda f + g)(b)$, donc E_3 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.
4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel (sauf si $a = b$) : si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application croissante, $-f$ est une application décroissante (alors f et $-f$ sont tous les deux dans $E_4 \Leftrightarrow f = 0$).

Exercice 7. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. (*) Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. (*) Montrer que $F + G = \{x + y : x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E . Montrer que $F + G \subset H$ si et seulement si $F \subset H$ et $G \subset H$.

4. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Solution.

1. F et G sont deux sous-espaces vectoriels donc $\mathbf{0}_E \in F$ et $\mathbf{0}_E \in G$. On en déduit que $\mathbf{0}_E \in F \cap G$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}, u, v \in F \cap G$ (donc $u, v \in F$ et $u, v \in G$), F et G sont deux sous-espaces vectoriels donc $\lambda u + v \in F$ et $\lambda u + v \in G$. On en déduit que $\lambda u + v \in F \cap G$.

2. F et G sont deux sous-espaces vectoriels donc $\mathbf{0}_E \in F$ et $\mathbf{0}_E \in G$. On en déduit que $\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E \in F + G$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}, u, v \in F + G$. Il existe $u_1, v_1 \in F, u_2, v_2 \in G$ tels que $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2$ donc $\lambda u + v = \lambda(u_1 + u_2) + v_1 + v_2 = (\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)$. F et G sont deux sous-espaces vectoriels donc $\lambda u_1 + v_1 \in F$ et $\lambda u_2 + v_2 \in G$. On en déduit que $\lambda u + v \in F + G$.

3. Supposons que $F + G \subset H$. Puisque $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on a également que $F \subset H$ et $G \subset H$.

Pour la réciproque, supposons que $F \subset H$ et $G \subset H$ et prenons un vecteur $w \in F + G$. Par définition, il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $w = u + v$. En particulier, u et v sont tous les deux dans le sous-espace vectoriel H , alors $w = u + v \in H$ aussi. On conclut que tout élément $w \in F + G$ est dans H , d'où $F + G \subset H$.

4. Il est immédiat que si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Montrons que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et si $F \not\subset G$, alors $G \subset F$. Prenons donc $v \in G$, il faut montrer que $v \in F$.

Parce que $F \not\subset G$, on peut choisir un $u \in F \setminus G$. Le fait que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel implique que $u + v \in F \cup G$, donc $u + v \in F$ ou $u + v \in G$.

Si $u + v \in G$, le vecteur $u = (u + v) - v \in G$ car G est un sous-espace vectoriel. Cela est impossible par hypothèse sur u .

Il suit que $u + v \in F$, alors $v = (u + v) - u \in F$ aussi car F est un sous-espace vectoriel. On vient donc de montrer $v \in G \Rightarrow v \in F$ soit $G \subset F$.

Familles libres, génératrices. Bases

Exercice 8. On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels, muni des lois usuelles.

1. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$$

$$F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$$

$$F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$$

2. Le vecteur $P(X) = 3X^3 - 2X^2 - 4X$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $P_1(X) = 1, P_2(X) = (X + 1)^2$ et $P_3(X) = X^3$? Plus généralement, décrire $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.

3. Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$ ci-dessous, dire s'il s'agit d'une famille libre ou non :

(a) $(3X, X^2 - 1, X^3)$.

(b) $(X + 1, X - 1)$.

(c) $(X^2 - 1, (X + 1)^2, X + 1)$.

4. Soit (P_0, \dots, P_n) une famille de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ et avec $\deg(P_i) = i$ pour tout i . Dire si elle est une famille libre et décrire le sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

Solution.

1. F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car il contient le polynôme nul et est stable ($\forall \lambda \in \mathbb{R}, P, Q \in F_1, (\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$ et $(\lambda P' + Q')(0) = \lambda P'(0) + Q'(0) = 0$).

F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car il contient le polynôme nul et est stable ($\forall \lambda \in \mathbb{R}, P, Q \in F_1, (\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$ et $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$).

F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient pas le polynôme nul (et n'est pas stable pour la loi $+$, ni pour la loi \cdot quand on multiplie par 0).

2. $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ est l'ensemble de tous les polynômes Q pour lesquels il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$Q(X) = a \cdot P_1(X) + b \cdot P_2(X) + c \cdot P_3(X) = a + b(X+1)^2 + cX^3 = (a+b) + 2bX + bX^2 + cX^3.$$

Le vecteur $P(X)$ est donc bien combinaison linéaire des vecteurs P_1, P_2 et P_3 (avec $a = 0, b = -2, c = 3$).

3. (a) $(3X, X^2 - 1, X^3)$ est libre. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :
 $a(3X) + b(X^2 - 1) + cX^3 = 0 \iff -b + 3aX + bX^2 + cX^3 = 0 \iff a = b = c = 0$.
- (b) $(X + 1, X - 1)$ est libre. Pour $a, b \in \mathbb{R}$:
 $a(X + 1) + b(X - 1) = 0 \iff a - b + (a + b)X = 0 \iff a - b = 0$ et $a + b = 0 \iff a = b = 0$.
- (c) $(X^2 - 1, (X + 1)^2, X + 1)$ n'est pas libre : $X^2 - 1 = X^2 + 2X + 1 - 2(X + 1) = (X + 1)^2 - 2(X + 1)$.
4. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_0P_0 + a_1P_1 + \dots + a_nP_n = 0$. Le seul terme à gauche qui contient X^n est a_nP_n , donc $a_n = 0$ et $a_0P_0 + \dots + a_{n-1}P_{n-1} = 0$. Par récurrence, $\forall k, 0 \leq k \leq n, a_k = 0$.

Exercice 9. On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire si elle est libre, génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et/ou une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{F}_1 = (M_1, M_2, M_3), \quad \mathcal{F}_2 = (M_1, M_2, M_3, M_4), \quad \mathcal{F}_5 = (M_1, M_2, M_4, M_5).$$

Solution.

1. \mathcal{F}_1 ne peut pas être génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car elle n'est constituée que de 3 vecteurs. Elle est libre car $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 2\lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
2. \mathcal{F}_2 est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: elle est constituée de 4 vecteurs. Il suffit donc de montrer que c'est une famille libre :

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 + 3\lambda_4 \\ \lambda_3 & 2\lambda_3 + 2\lambda_4 \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

3. \mathcal{F}_3 n'est pas une famille libre : $M_5 = M_4 + M_2 + M_1$. Ce n'est donc pas une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Elle n'est pas non plus génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: M_3 n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F}_3 (comme toute matrice dont le $(2, 1)$ -me coefficient est non nul). Alternativement : puisque \mathcal{F}_3 a le bon nombre de vecteurs, libre équivaut à génératrice.

Bases et dimension

Exercice 10. On considère les trois sous-ensembles de \mathbb{R}^3 suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(a + 3b - 3c, -a + b - 5c, 2a + 3b) \in \mathbb{R}^3 ; a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 6y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\} \\ H &= \{\lambda \cdot (1, 1, 1) ; \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base de F, G et H et en déduire leurs dimensions.
3. Déterminer des équations de F, G et H .
4. Identifier les ensembles $F \cap G, F \cap H$ et $G \cap H$.

Solution.

1. On peut identifier F, G et H avec des sous-espaces engendrés par une famille de vecteurs :

$$\begin{aligned} F &= \{(a + 3b - 3c, -a + b - 5c, 2a + 3b) \in \mathbb{R}^3 ; a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, -1, 2) + b(3, 1, 3) + c(-3, -5, 0) \in \mathbb{R}^3 ; a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, -1, 2), (3, 1, 3), (-3, -5, 0)). \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 6y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x + 6y \text{ et } x = 3y\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3y \text{ et } x = 3y\} \\ &= \{(3y, y, 3y) \in \mathbb{R}^3 ; y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((3, 1, 3)). \\ H &= \text{Vect}((1, 1, 1)). \end{aligned}$$

2. Une base de F est $((1, -1, 2), (3, 1, 3))$ car $(-3, -5, 0) = 3(1, -1, 2) - 2(3, 1, 3)$ donc F est de dimension 2.
Une base de G est $((3, 1, 3))$. G est de dimension 1.
Une base de H est $((1, 1, 1))$. H est de dimension 1.
3. Rappelons que l'équation $ax + by + cz = 0$ est satisfait par tout $(x, y, z) \in F$ si et seulement si elle est satisfait par les vecteurs génératrices de F . En utilisant (2), cela veut dire :

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 3a + b + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 4b - 3c = 0 \end{cases}$$

Alors une équation (correspondante au choix $c = 4$) de F est $-5x + 3y + 4z = 0$.

Les équations de G sont simplement $x - 6y + z = 0$ et $x - 3y = 0$ (notons qu'elles ne sont pas colinéaires).

L'équation $ax + by + cz = 0$ est satisfait par tout $(x, y, z) \in H$ si et seulement si $a + b + c = 0$, donc les équations de H (correspondantes aux choix $(b, c) = (1, 0)$ et $(b, c) = (0, 1)$) sont $x = y$ et $z = x$.

4. Il suit de (2) que $F \cap G = G$ et que $G \cap H = \{0\}$.

Le vecteur directeur $(1, 1, 1)$ de H ne satisfaisant pas l'équation de F (voir (3)), il suit que $F \cap H = \{0\}$.

Exercice 11. (*) Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

Solution. Posons $m = \dim(F)$, $n = \dim(G)$ et $p = \dim(F \cap G)$. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $F \cap G$. C'est une famille libre de vecteurs de F donc on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_m)$ de F . De même, c'est une famille libre de vecteurs de G donc on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, g_{p+1}, \dots, g_n)$ de G . Montrons que

$$(e_1, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_m, g_{p+1}, \dots, g_n)$$

est une base de $F + G$.

Il est clair que c'est une famille génératrice de $F + G$.

C'est une famille libre : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_{p+1}, \dots, \mu_m, \nu_{p+1}, \dots, \nu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \mu_{p+1} f_{p+1} + \dots + \mu_m f_m + \nu_{p+1} g_{p+1} + \dots + \nu_n g_n = \mathbf{0}_E.$$

Alors

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \mu_{p+1} f_{p+1} + \dots + \mu_m f_m = -(\nu_{p+1} g_{p+1} + \dots + \nu_n g_n)$$

est un vecteur de $F \cap G$. Il existe donc $\lambda'_1, \dots, \lambda'_p \in \mathbb{R}$ tels que $-(\nu_{p+1} g_{p+1} + \dots + \nu_n g_n) = \lambda'_1 e_1 + \dots + \lambda'_p e_p$ soit

$$\lambda'_1 e_1 + \dots + \lambda'_p e_p + \nu_{p+1} g_{p+1} + \dots + \nu_n g_n = \mathbf{0}_E.$$

Or $(e_1, \dots, e_p, g_{p+1}, \dots, g_n)$ est de G donc une famille libre donc $\lambda'_1 = \dots = \lambda'_p = \nu_{p+1} = \dots = \nu_n = 0$. En reportant dans la deuxième égalité, on obtient

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \mu_{p+1} f_{p+1} + \dots + \mu_m f_m = \mathbf{0}_E.$$

Or $(e_1, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_m)$ est une base de F donc libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_{p+1} = \dots = \mu_m = 0$.

Somme directe, espaces supplémentaires

Exercice 12. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que le sous-ensemble \mathcal{S}_3 des matrices symétriques et le sous-ensemble \mathcal{A}_3 des matrices antisymétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et préciser leurs dimensions.

Généraliser à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution. On vérifie que \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n sont non vides et stables. Tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{A + A^T}{2} \in \mathcal{S}_n \quad \text{et} \quad \frac{A - A^T}{2} \in \mathcal{A}_n.$$

On a donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. De plus, $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ (une matrice symétrique et antisymétrique est égale à son opposée).

Une base de \mathcal{S}_n est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

et \mathcal{S}_n est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Une base de \mathcal{A}_n est

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

et \mathcal{S}_n est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 13. Soit E l'espace des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , soit $F \subset E$ le sous-ensemble des applications paires ($f(-x) = f(x)$) et soit $G \subset E$ le sous-ensemble des application impaires ($f(-x) = -f(x)$).

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et que $F \cap G = \{0_E\}$.
2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et considérons les deux fonctions f_+ et f_- définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_+(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_-(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Montrer que $f_+ \in F$, $f_- \in G$ et $f = f_+ + f_-$.

3. En déduire que $E = F \oplus G$.

Solution.

1. F et G sont non vides (la fonction identiquement nulle est à la fois paire et impaire) et stables (voir Exercice 16(2)).

Si f est paire et impaire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $f(x) = f(-x) = -f(x)$ donc $f(x) = 0$. Autrement dit, f est la fonction nulle et $F \cap G = \{0_E\}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_+(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_+(-x)$ donc f_+ est paire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_-(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = -\frac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_-(-x)$ donc f_- est impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_+(x) + f_-(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$.

3. Dans la question 1. on a montré que $F \cap G = \{0_E\}$ et dans la question 2. que $E = F + G$ donc $E = F \oplus G$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit H un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ et soit $v \in E$ un vecteur.

1. (*) Montrer que les sous-espaces vectoriels H et $\text{Vect}(v)$ sont supplémentaires si et seulement si $v \notin H$.
2. On suppose que $v \notin H$. Montrer que pour tout vecteur $w \in H$, les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(v + w)$ et H sont supplémentaires. (En particulier, cela montre qu'il existe typiquement *plusieurs* supplémentaires à H .)

Solution.

1. Si H et $\text{Vect}(v)$ sont supplémentaires, alors $\text{Vect}(v) \cap H = \{\mathbf{0}_E\}$. Il suit que $\lambda \cdot v \in H \iff \lambda = 0$, en particulier $v \notin H$.
Réciproquement, supposons que $v \notin H$. Alors $\lambda \cdot v \notin H$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: sinon, $v = \lambda^{-1}(\lambda \cdot v)$ était un vecteur de H . Il suit que $H \cap \text{Vect}(v) = \{\mathbf{0}_E\}$. De plus, $\dim(H) + \dim(\text{Vect}(v)) = (n-1) + 1 = \dim(E)$ donc H et $\text{Vect}(v)$ sont supplémentaires.
2. Soit $v \notin H$ et $w \in H$. Alors $v + w$ n'est pas un vecteur de H : en effet, si $v + w \in H$, alors $v = (v + w) - w$ était dans H , ce qui est impossible par hypothèse sur v . Puisque $v + w \notin H$, la question 1. implique que $\text{Vect}(v + w)$ et H sont supplémentaires.

Exercice 15. (*) Soit E un espace vectoriel et E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels de E . Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}_E\}$ et $(E_1 + E_2) \cap E_3 = \{\mathbf{0}_E\}$.

Solution. Soit $F = E_1 + E_2 + E_3$. Les sous-espaces vectoriels E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe si et seulement si tout vecteur $v \in F$ s'écrit uniquement comme $v = v_1 + v_2 + v_3$ avec $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$ et $v_3 \in E_3$. En particulier, si $v \in E_1 \cap E_2$, alors les deux décompositions

$$v + \mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E = v = \mathbf{0}_E + v + \mathbf{0}_E$$

montrent que $v = \mathbf{0}_E$. De plus, si $w \in (E_1 + E_2) \cap E_3$, on peut l'écrire comme

$$w_1 + w_2 + \mathbf{0}_E = w = \mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E + w$$

pour certains $w_1 \in E_1$ et $w_2 \in E_2$. De tout façon, on conclut que $w = \mathbf{0}_E$.

Pour la réciproque, soient $v_1, w_1 \in E_1, v_2, w_2 \in E_2$ et $v_3, w_3 \in E_3$ tels que

$$v_1 + v_2 + v_3 = w_1 + w_2 + w_3$$

dans E . Par hypothèse, $(E_1 + E_2) \cap E_3 = \{\mathbf{0}_E\}$ donc $E_1 + E_2$ et E_3 sont en somme directe. Cela implique que $v_1 + v_2 = w_1 + w_2$ et $v_3 = w_3$. De plus, $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}_E\}$ donc E_1 et E_2 sont en somme directe, d'où $v_1 + v_2 = w_1 + w_2 \implies v_1 = w_1$ et $v_2 = w_2$.

On conclut que tout vecteur $v \in E_1 + E_2 + E_3$ s'écrit uniquement comme $v = v_1 + v_2 + v_3$ avec $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$ et $v_3 \in E_3$, donc E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

Exercices supplémentaires (**)

Exercice 16. Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4.

1. Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes pairs, c'est-à-dire

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

3. Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}_4[X]$ défini par

$$G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(X) = XP'(X)\}$$

où P désigne le polynôme dérivé de P . Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer une base de G et en déduire sa dimension.

4. Déterminer $F \cap G$. Que peut-on dire du sous-espace vectoriel $F + G$?

Solution.

1. Une base de $\mathbb{R}_4[X]$ est $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ et $\mathbb{R}_4[X]$ est de dimension 5.
2. F est non vide car le polynôme nul est pair ($0(-X) = 0 = 0(X)$).
Il est stable : si $\lambda \in \mathbb{R}, P, Q \in F$, $(\lambda P + Q)(-X) = \lambda P(-X) + Q(-X) = \lambda P(X) + Q(X) = (\lambda P + Q)(X)$.
Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$, alors
 $P \in F \implies a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 = a - bX + cX^2 - dX^3 + eX^4 \iff b = d = 0$.
Une base de F est donc $(1, X^2, X^4)$ et F est de dimension 3.
3. G est non vide car $0 = X \cdot 0$.
Il est stable : si $\lambda \in \mathbb{R}, P, Q \in G$
 $X(\lambda P + Q)'(X) = X(\lambda P'(X) + Q'(X)) = \lambda X P'(X) + X Q'(X) = \lambda P(X) + Q(X) = (\lambda P + Q)(X)$.
Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$, alors
 $P \in G \implies a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 = bX + 2cX^2 + 3dX^3 + 4eX^4 \iff a = c = d = e = 0$.
Une base de G est (X) et $\dim(G) = 1$.
4. $F \cap G = \{0\}$ car le polynôme de la base de G n'est pas dans F . La somme des deux sous-espaces est donc une somme directe et est de dimension 4.

Exercice 17. Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées 3×3 .

1. Montrer que le sous-ensemble \mathcal{N}_3 des matrices carrées de trace nulle est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_3 dont on précisera la dimension.
2. Trouver un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui soit supplémentaire à \mathcal{N}_3 .
3. Pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{N}_n \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ de trace nulle.

Solution.

- 1.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

qui est un sous-espace vectoriel de dimension 8.

2. $F = \text{Vect}(I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est un supplémentaire de \mathcal{N}_3 (la somme des dimensions est égale à la dimension de l'espace et l'intersection est clairement égale à $\{0\}$).

3. Soit I_n la matrice unité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\text{Vect}(I_n) \cap \mathcal{N}_n = \{0\}$ car $\text{tr}(\lambda \cdot I_n) = \lambda \cdot n = 0 \iff \lambda = 0$. De plus, toute matrice M s'écrit comme

$$M = \left(\frac{\text{tr}(M)}{n} \cdot I_n \right) + \left(M - \frac{\text{tr}(M)}{n} \cdot I_n \right)$$

où $M - (\text{tr}(M)/n) \cdot I_n$ est de trace nulle. Il suit que \mathcal{N}_n et $\text{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires, alors $\dim(\mathcal{N}_n) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1$.

Exercice 18. On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

$$F_1 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_3 = 0\}, \quad F_2 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_5 = 1\}, \quad F_3 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ est bornée}\}.$$

2. Le vecteur $u = (5^n)_{n \in \mathbb{N}}$, est-il combinaison linéaire des vecteurs $v = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (3^n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Pour $d \in \mathbb{N}$, on considère la suite $u_d = (1^d, 2^d, 3^d, \dots)$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, la famille de vecteurs (u_0, \dots, u_d) est libre.

Solution.

1. F_1 contient la suite nulle et est stable : soient $\lambda \in \mathbb{R}, u, v \in F_1$, alors $(\lambda u + v)_0 = \lambda u_0 + v_0 = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$. De la même façon, $(\lambda u + v)_3 = 0$ donc $\lambda u + v \in F_1$.

F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient pas la suite nulle.

F_3 contient la suite nulle et est stable. En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u, v \in F_3$, alors qu'il existe $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M_1$ et $|v_n| \leq M_2$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| M_1 + M_2$, donc la suite $\lambda u + v$ est bornée et F_3 est un sous-espace vectoriel.

2. Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda v + \mu w$. En regardant les premières trois termes, on trouve que

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda v + \mu w)_0 = u_0 \\ (\lambda v + \mu w)_1 = u_1 \\ (\lambda v + \mu w)_2 = u_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + 3\mu = 5 \\ 4\lambda + 9\mu = 25 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \mu = 3 \\ 5\mu = 21 \end{cases}$$

On arrive à une contradiction, donc le vecteur u n'est pas combinaison linéaire des vecteurs v et w .

3. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d = 0$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cdot n + \lambda_2 \cdot n^2 + \dots + \lambda_d \cdot n^d = 0.$$

Par conséquent, $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_d X^d$ est un polynôme de degré $\leq d$ avec un nombre de racines infini. Il suit que $P(X) = 0$ est le polynôme nulle, donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_d = 0$.